

MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM  
STATISTISCHE AFDeling

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig  
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 170A

DEUXIÈME RAPPORT RELATIF AUX RECHERCHES  
SUR LE RAYONNEMENT DE FLAMMES.

par  
Madame E. C. Bos-Levenbach  
et  
R. Doornbos

1955

## 1. Introduction.

Dans un précédent rapport (Rapport S 140), nous avons utilisé la méthode de l'analyse de la variance pour l'étude des résultats de la 5ème série d'expériences relatives au rayonnement de flammes. Dr E.F. Drion (T.N.O. - A.B.W.) avait appliqué cette même méthode, sous une forme légèrement différente, lors d'un examen du même sujet. Il était apparu alors, qu'en vue de confirmer les résultats obtenus, il y avait intérêt à reprendre l'analyse de la question à l'aide de méthodes nécessitant moins d'hypothèses sur les distributions de probabilité. Ce rapport constituera donc une introduction de ces méthodes dans l'étude statistique des processus de rayonnement de flammes. Nous reprendrons le problème en faisant usage d'une méthode non paramétrique, à savoir le test de WILCOXON [1], [2].

Pour la description de l'expérience, cf. rapport S 140, § 1.

## 2. Examen préliminaire

La question d'une éventuelle dépendance avait été étudiée déjà à l'aide d'une méthode non-paramétrique, dans le rapport S 140, § 2.

La conclusion était la suivante: "A l'exception peut être des grandeurs  $\epsilon$ , les valeurs observées pour les différentes fentes, dans le cas d'une même flamme, dépendent les unes des autres. On ne peut donc pas combiner entre eux de la façon habituelle les résultats des tests appliqués aux différentes fentes, car les méthodes généralement suivies supposent l'indépendance des observations.

## 3 Test de diverses hypothèses et intervalles de confiance.

Comme dans le rapport S 140 § 3, nous testerons ici les hypothèses suivantes:

$\alpha$ : La nature du combustible n'a pas d'influence sur le rayonnement

$\beta$ : La symétrie ou l'asymétrie n'a pas d'influence sur le rayonnement

L'hypothèse  $\gamma$  qui concerne l'interaction ne peut être testée à l'aide des méthodes non-paramétriques.

Le test de Wilcoxon fut appliqué à l'hypothèse  $\alpha$  en comparant les observations 1c aux observations 2c (test I) et les observations 1d aux observations 2d (test II). Les deux tests furent ensuite combinés, comme nous le montrerons par la suite.

Quant à l'hypothèse  $\beta$ , elle fut testée en comparant 1c à 1d (I) et 2c à 2d (II). I et II furent également combinés.

La grandeur U de Wilcoxon, définie dans le memorandum S 47 (M7), possède une distribution bien connue dans le cas de 2 échantillons comportant 4 observations ce qui est précisément le cas ici. Appelons  $U_1$  et  $U_2$  les variables stochastiques correspondant aux tests I et II: la distribution de  $U = U_1 + U_2$  peut être calculée exactement

On peut déterminer les valeurs  $U_1$  et  $U_2$  pour chaque hypothèse pour chaque fente, et pour les quantités  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  et e. A l'aide de la distribution de U, on trouvera la probabilité du dépassement de  $U = U_1 + U_2$  (cf. pour détails l'appendice où un exemple est complètement développé).

Pour les valeurs entières de U s'écartant le moins des valeurs prévues sous l'hypothèse nulle, on trouve comme limite inférieure (supérieure) les nombres 5(27); 3(29); 0(32), correspondant à un niveau de probabilité au plus égal à 0,05; 0,01 et 0,001.

Le tableau I donne les valeurs de U et les probabilités de dépassement correspondantes. Pour faciliter la comparaison avec le tableau 2 de S 140, les probabilités de dépassement dans les intervalles 0,05 - 0,01; 0,01 - 0,001; < 0,001 seront désignées respectivement par I, II, et III. 1<2 signifie que la valeur trouvée pour  $U = U_1 + U_2$  est plus petite que celle prévue sous l'hypothèse testée.

Etant donné que seul l'ordre de succession des observations importante (par ex. une très grande ou une très petite valeur influe peu sur la valeur résultante de U) le signe d'inégalité obtenu dans un cas déterminé peut être différent du signe correspondant dans le tableau du rapport S 140. Nous rencontrons cette éventualité par exemple pour la fente 7,  $R_1$  et  $R_2$ , c par rapport à d; ici aucun des deux tests n'indique un effet systématique.

Tableau I  
 Probabilités de dépassement trouvées à l'aise du test de Wilcoxon, dans le cas des hypothèses ( $c$  et  $d$  donnent le même rayonnement) et (1 et 2 donnent le même rayonnement).

		2	3	4	5	6	7
		U	K	U	K	U	K
$R_1$	$\alpha$	0	0,0004	III 1<2	0	0,0004	III 1<2
	$\beta$	$5\frac{1}{2}$	0,04	I $c < d$	$32\frac{1}{2}$	0,0004	III $c > d$
$R_2$	$\alpha$	0	0,0004	III 1<2	0	0,0004	III 1<2
	$\beta$	2	0,003	II $c < d$	$31\frac{1}{2}$	0,001	II $c > d$
$R_3$	$\alpha$	1	0,0012	II 1<2	2	0,003	II 1<2
	$\beta$	6	0,05	I $c \leq d$	$7\frac{1}{2}$	0,08	I $c \leq d$
$e$	$\alpha$	$1\frac{1}{2}$	0,002	II 1<2	0	0,0004	III 1<2
	$\beta$	13	0,62	I $c < d$	$24\frac{1}{2}$	0,13	II $c > d$

Dans les figures 1 .. 8, on a indiqué les intervalles de confiance, correspondant au seuil de signification 0,05, déterminés à l'aide du test de Wilcoxon<sup>1)</sup>; les diagrammes ont été tracés pour les différences de moyenne se rapportant aux combustibles 2 et 1 et à la flamme symétrique et asymétrique.

Comme il fallait s'y attendre, ces intervalles sont en général plus larges que les intervalles correspondants des figures 1 - 8 du rapport S 140. La remarque faite dans S 140, page 5 se justifie ici: par suite de la dépendance mutuelle des observations des diverses fentes les intervalles de confiance ne sont pas donnés simultanément avec la même exactitude.

La même analyse que ci-dessus est appliquée à la valeur moyenne du rayonnement pour la flamme entière et pour chacune des deux moitiés. Les résultats sont consignés dans le tableau II.

Tableau II

Test de Wilcoxon appliqué à la moyenne prise sur toutes les fentes ou sur la moitié de celles-ci.

		1ère moitié			2ème moitié			flamme entière		
		U	k		U	k		U	k	
$R_1$	$\alpha$	0	0,0004	III 1<2	15	0,92	1<2	0	0,0004	III 1<2
	$\beta$	32	0,0004	III c>d	31	0,001	II c>a	32	0,0004	III c>d
$R_2$	$\alpha$	0	0,0004	III 1<2	12	0,49	1<2	2	0,003	II 1<2
	$\beta$	32	0,0004	III c>d	29	0,007	II c>d	32	0,003	II c>d
$R_3$	$\alpha$	2	0,003	II 1<2	19	0,62	1>2	6	0,05	1<2
	$\beta$	11½	0,43	c<d	24	0,13	c>d	17	0,92	c>d
$C$	$\alpha$	0	0,0004	III 1<2	15	0,92	1<2	3	0,007	II 1<2
	$\beta$	27	0,03	I c>d	21½	0,32	c>d	26	0,05	c>d

Les résultats sont les mêmes que ceux du rapport S 140 (tableau 3, page 6)

Dans le tableau III, on trouve les résultats du test de Wilcoxon appliqué au rayonnement de fond. Il manque cependant dans le matériel de base, la 1ère et la 2ème observation du groupe 2c.

1) La construction des intervalles de confiance avec le test de Wilcoxon est décrite dans le memorandum S 145(M 52) du Centre Mathématique, Amsterdam. On suppose dans ce cas que les deux échantillons résultent de deux lois de répartition qui ne diffèrent que dans leurs moyennes.

Nous devons donc calculer maintenant la distribution exacte de  $U$  à partir de  $U_1(n_1 = 4; m_1 = 3)$  combiné à  $U_2(n_2 = 4; m_2 = 4)$ .

Pour les valeurs entières de  $U$  s'écartant le moins de la moyenne, on trouve sous l'hypothèse nulle comme limite inférieure (supérieure) les nombres 4(24), 2(26) et 0(28) correspondant à un niveau de probabilité au plus égal à 0,05, 0,01 et 0,001.

Tableau III

Test de Wilcoxon appliquée à chacun des 3 points de fond séparément.

		1			2			3			
B	$\alpha$	0	0,0008	III	$1 \leq 2$	$8\frac{1}{2}$	0,16	$1 \leq 2$	5	0,029	I
	$\beta$	10	0,45		$c < d$	16	0,75	$c > d$	$21\frac{1}{2}$	0,32	$c > d$

Les résultats paraissent être semblables à ceux du rapport S 140 (tableau 4, page 7).

Dans les figures 9 et 10 on a tracé les intervalles de confiance pour les différences des valeurs moyennes de B.

L'uniformité de la flamme a déjà été examinée dans le rapport S 140 à l'aide d'une méthode non-paramétrique (tableau 6, page 8). Il est donc inutile d'en refaire l'étude ici.

#### 4 Conclusions.

Bien que les probabilités de dépassement soient légèrement plus grandes et les intervalles de confiance plus larges que ceux trouvés dans le rapport S 140, sous l'hypothèse de normalité, on peut affirmer que toutes les conclusions du précédent rapport sont confirmées par l'examen ci-dessus.

Les conclusions sont peut-être moins explicites ici, mais, par ailleurs, nous n'avons pas dû faire l'hypothèse de normalité, hypothèse dont on ne peut tester la validité.

Une difficulté sérieuse subsiste cependant: les méthodes non-paramétriques ne conviennent pas à l'examen de l'interaction entre combustible et symétrie dont nous n'avons donc pu tester l'hypothèse ici.

Appendice

Au § 3 du présent rapport nous avons testé:

- a. Hypothèse  $\alpha$  : I observations 1c-2c  
II observations 1d-2d
- b. Hypothèse  $\beta$  : I observations 1c-1d  
II observations 2c-2d

Nous allons montrer maintenant comment nous avons combiné  $U_1$  et  $U_2$ . Choisissons, à cet effet, les observations de la fente 4,  $R_2$  ordonnées suivant les valeurs croissantes.

Tableau IV

Observations de la fente 4,  $R_2$ .

1c	1d
8,60	6,85
8,85	6,90
8,95	7,--
9,35	7,75
2c	2d
10,....	7,55
10,15	7,85
10,75	8,80
11,....	9,15

Nous trouvons, à l'aide du test de WILCOXON:

a.I.  $U_1 = 0$                                     b.I.  $U_1 = 16$   
 $U = 1$                                              $U = 32$ .  
II.  $U_2 = 1$                                     II.  $U_2 = 16$

Afin de déterminer la probabilité de dépassement bilatérale de  $U = U_1 + U_2$ , nous allons nous servir du tableau des probabilités de dépassement unilatérales que l'on trouve dans H.B. MANN and D.R. WHITHEY [1], tableau I,  $n = 4$ ,  $m = 4$ . On peut facilement déduire  $P[U_i = U_i]$  des valeurs  $P[U_i \leq U_i]$ <sup>1)</sup> en soustrayant deux termes successifs l'un de l'autre.

1)  $P[\underline{x} \leq \bar{x}]$  = probabilité pour que  $\underline{x} \leq \bar{x}$   
 $P[\underline{x} = \bar{x}]$  =         "         "         "         "  $\underline{x} = \bar{x}$

De toutes les combinaisons possibles de  $U_1$  et  $U_2$  qui donnent une valeur déterminée  $U$ , on peut tirer les  $P_1$  et  $P_2$  correspondants, et par suite

$$\sum P_1 P_2; P[\underline{U} = \bar{U}] \text{ pour } U = 0, 1, \dots, 16.$$

d'où encore  $P[\underline{U} \leq \bar{U}]$ .

Une méthode analogue est la première signalée dans WILCOXON [3]. Si la valeur trouvé pour  $U$  est plus petite que celle prévue sous l'hypothèse testée (c.à.d. 16, lorsque  $U$  est compris entre 0 et 32 et qu'il n'y a pas de valeurs observées égales) la probabilité de dépassement bilatérale est égale à  $2 \times P[\underline{U} \leq \bar{U}]$ .

Si  $U > 16$ , on constate qu'il faut déterminer la probabilité  $P[\underline{U} \geq 32-U]$  de dépassement à droite de  $32-U$ . La réponse que nous trouvons ainsi est exacte, car la distribution de  $\underline{U}$  est toujours symétrique sous l'hypothèse testée (distribution toujours symétrique, lorsqu'il n'y a pas de valeurs observées égales). Il faut à nouveau multiplier par 2 pour trouver la probabilité de dépassement bilatérale.

Le tableau V donne le calcul des probabilités de dépassement pour  $U = 0, 1, 2$  et  $3$ .

Tableau V

Calcul des probabilités de dépassement bilatérales de  $U$ .

$U =$ $U_1 + U_2$	$U_1$	$U_2$	$P[\underline{U}_1 = U_1] = P_1$	$P[\underline{U}_2 = U_2] = P_2$	$P[\underline{U} = \bar{U}] = \sum P_1 P_2$	$P[\underline{U} \leq \bar{U}]$	$k = \text{probabilité de dépassement bilatérale}$
0	0	0	$1/70$	$1/70$	$1/4900$	$1/4900$	$2/4900 = 0,0004$
1	0	1	$1/70$	$1/70$	$2/4900$	$3/4900$	$6/4900 = 0,0012$
	1	0	$1/70$	$1/70$			
2	0	2	$1/70$	$2/70$	$5/4900$	$8/4900$	$16/4900 = 0,0033$
	1	1	$1/70$	$1/70$			
	2	0	$2/70$	$1/70$			
3	0	3	$1/70$	$3/70$	$10/4900$	$18/4900$	$36/4900 = 0,0073$
	1	2	$1/70$	$2/70$			
	2	1	$2/70$	$1/70$			
	3	0	$3/70$	$1/70$			

Dans cet exemple, nous trouvons donc :

a. Hypothèse  $\alpha$

$$U = 1, \quad k = 0,0012.$$

Conclusion: le combustible 1 donne systématiquement une intensité de rayonnement moindre que le combustible 2.

b. Hypothèse  $\beta$

$$U = 32, \quad 32-U = 0, \quad k = 0,0004.$$

Conclusion: la flamme symétrique donne systématiquement une intensité plus grande que la flamme asymétrique.

S'il y avait eu des valeurs observées égales (ce qui n'était pas le cas dans l'exemple ci-dessus) nous aurions pu trouver des valeurs de  $U$  non-entières. Une valeur approchée de la probabilité de dépassement est obtenue par interpolation linéaire. En employant cette méthode-ci la probabilité de dépassement trouvée sera un peu plus grande que celle prévue, si bien que nos conclusions resteront dans "la zone de sécurité" c'est à d. que au niveau de probabilité donné, nous ne rejeterons pas plus souvent à tort l'hypothèse testée.

En ce qui concerne le rayonnement de fond, où il manque une observation (le 1er test est donc appliqué à un échantillon de 4 observations comparé à un autre de 3 observations), le calcul de la distribution exacte de  $U$  se fait d'une façon tout à fait analogue à la précédente.

Bibliographie

- [1] H.B. Mann and D.R. Whitney, On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Ann.Math.Stat. 18 (1947) p. 50-60.
- [2] F. Wilcoxon, Individual comparisons by ranking methods, Biometrics 1 (1945), p. 80-83.
- [3] F. Wilcoxon, Individual comparisons of grouped data by ranking methods, Journal of Entomology, 39 (1946), p. 269-270.

FIG. 1

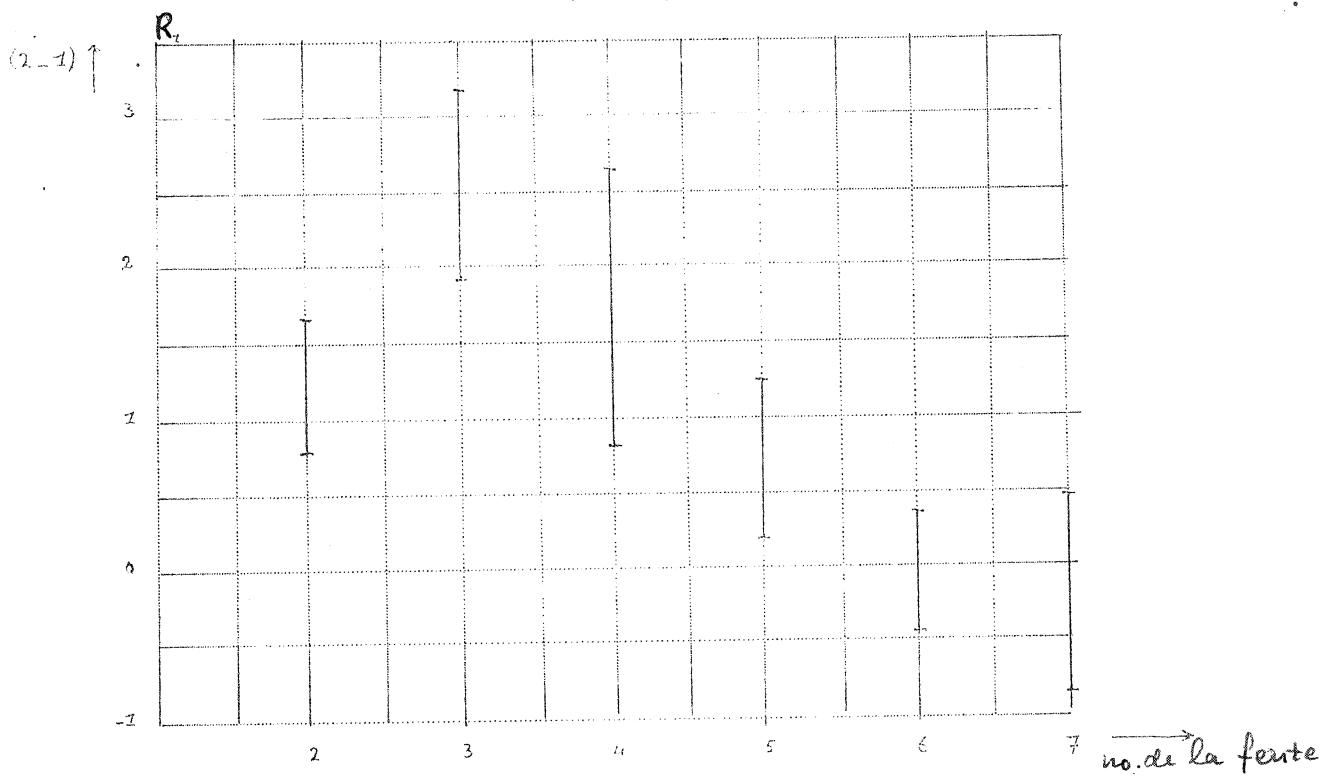


FIG. 2

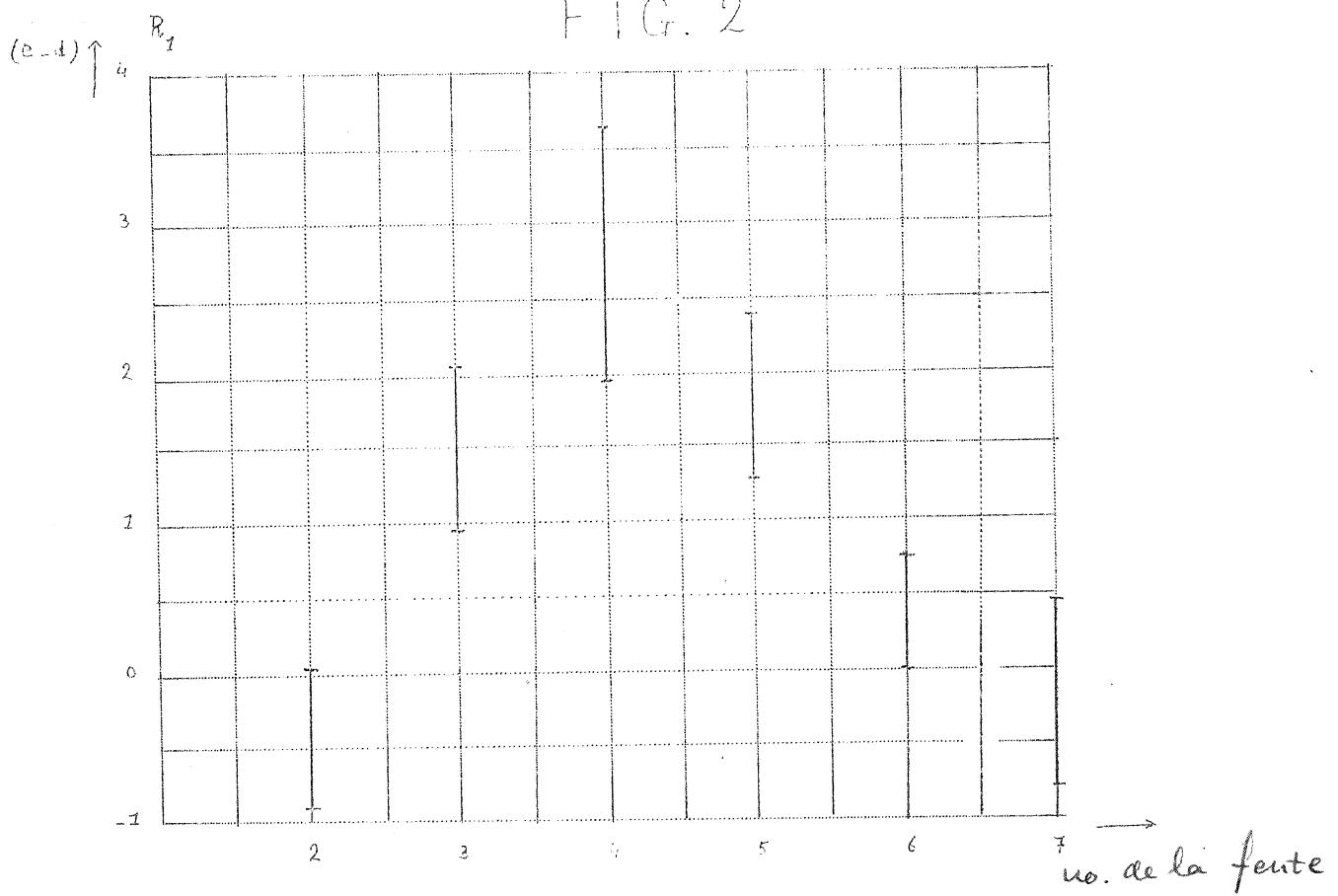


FIG. 3

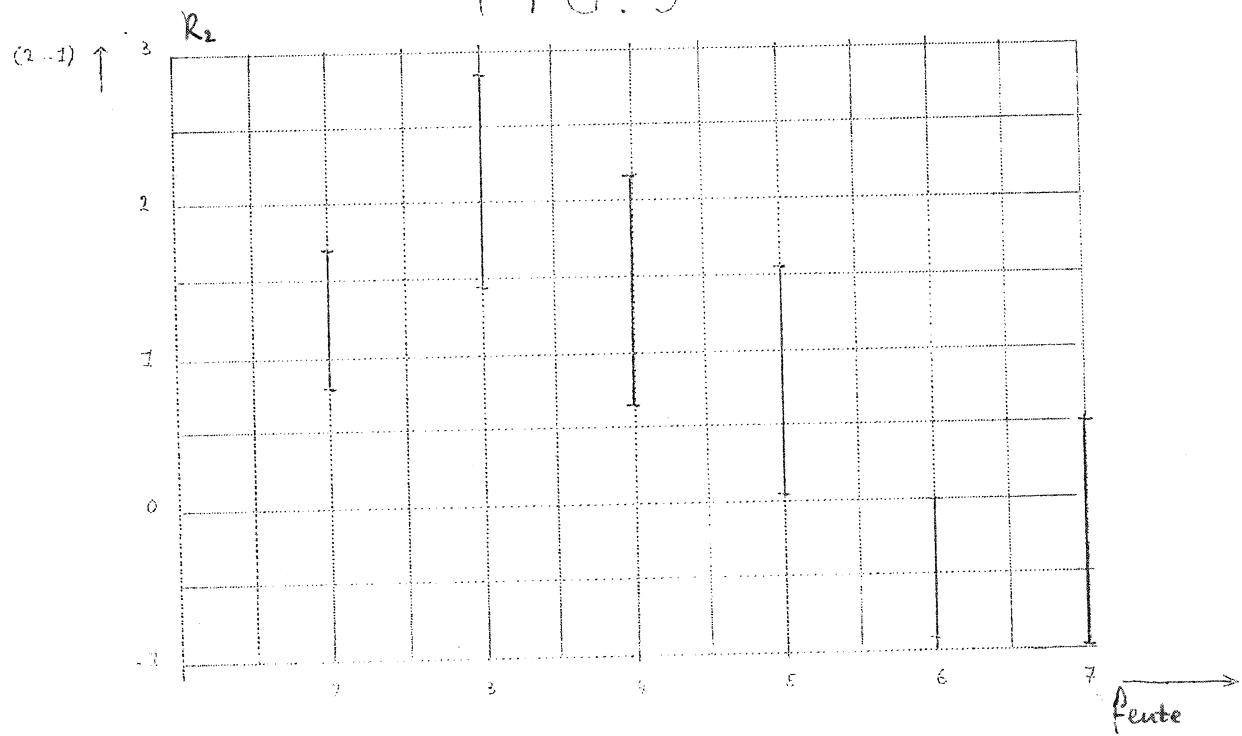


FIG. 4

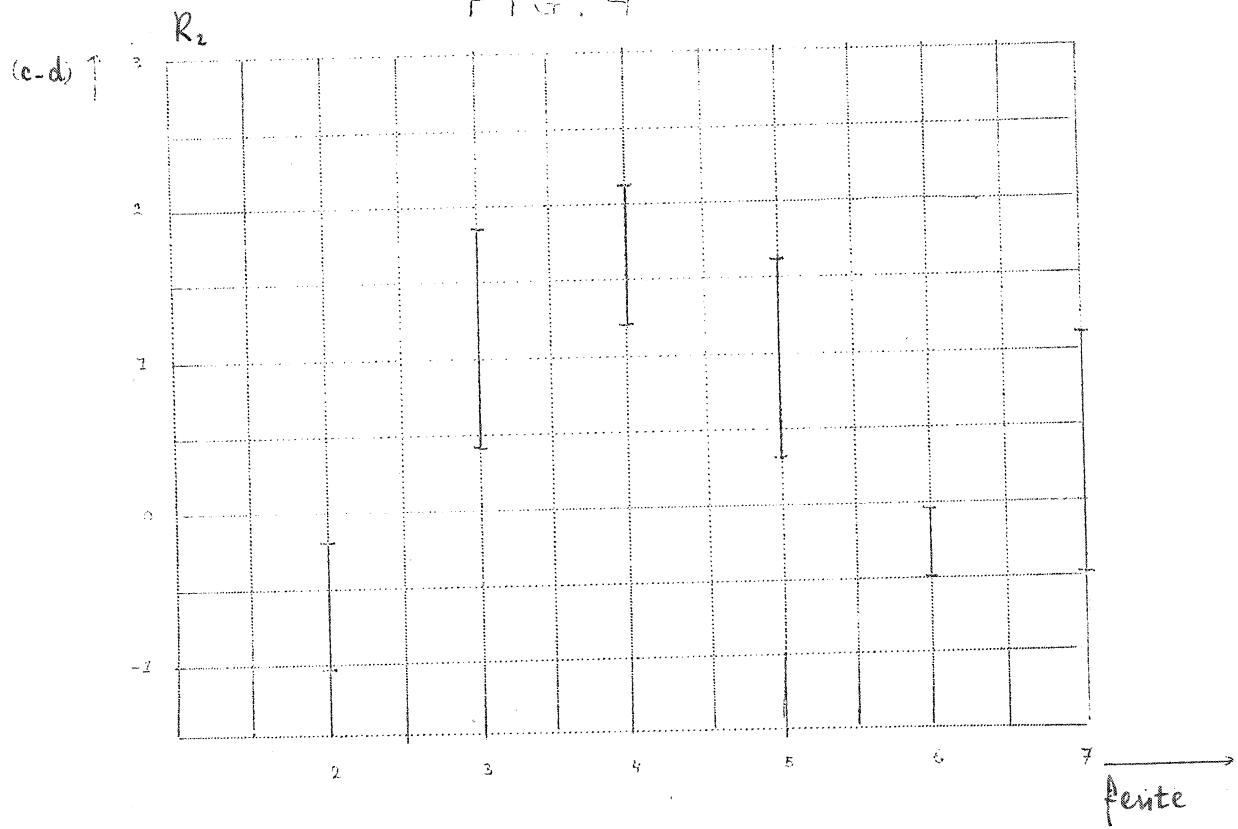


FIG. 5

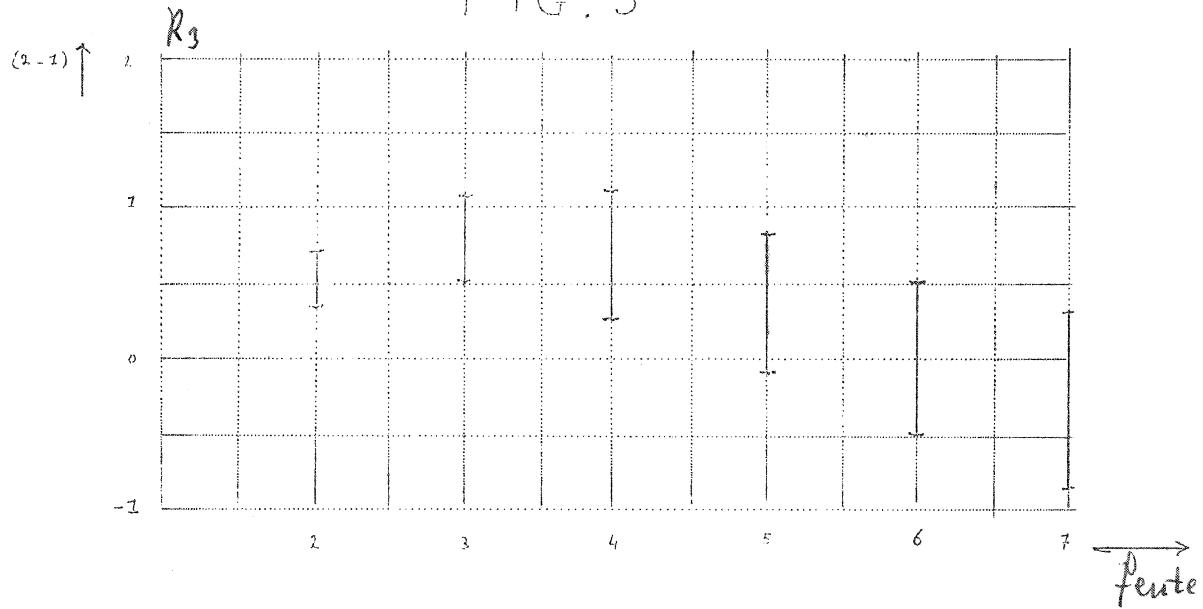


FIG. 6

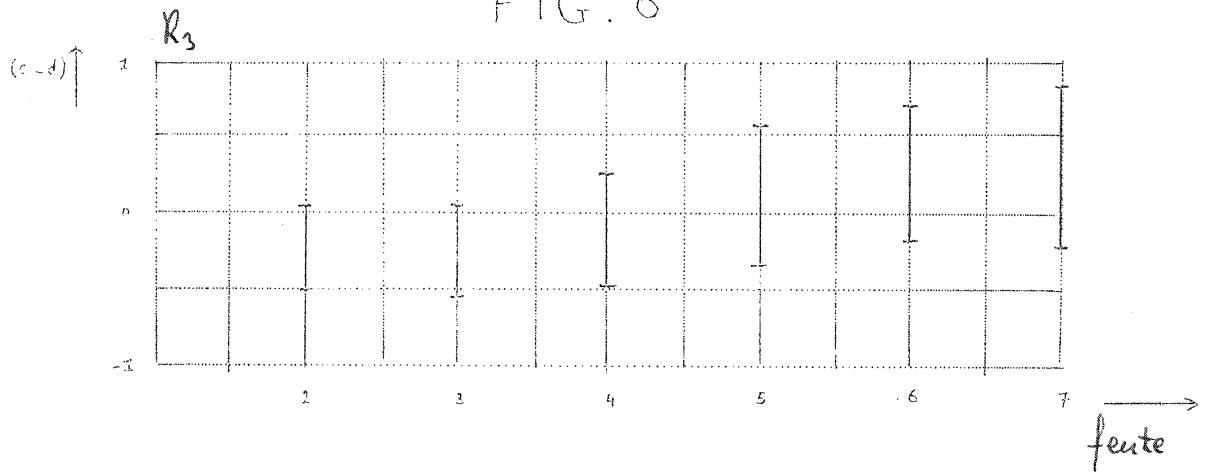


FIG. 7

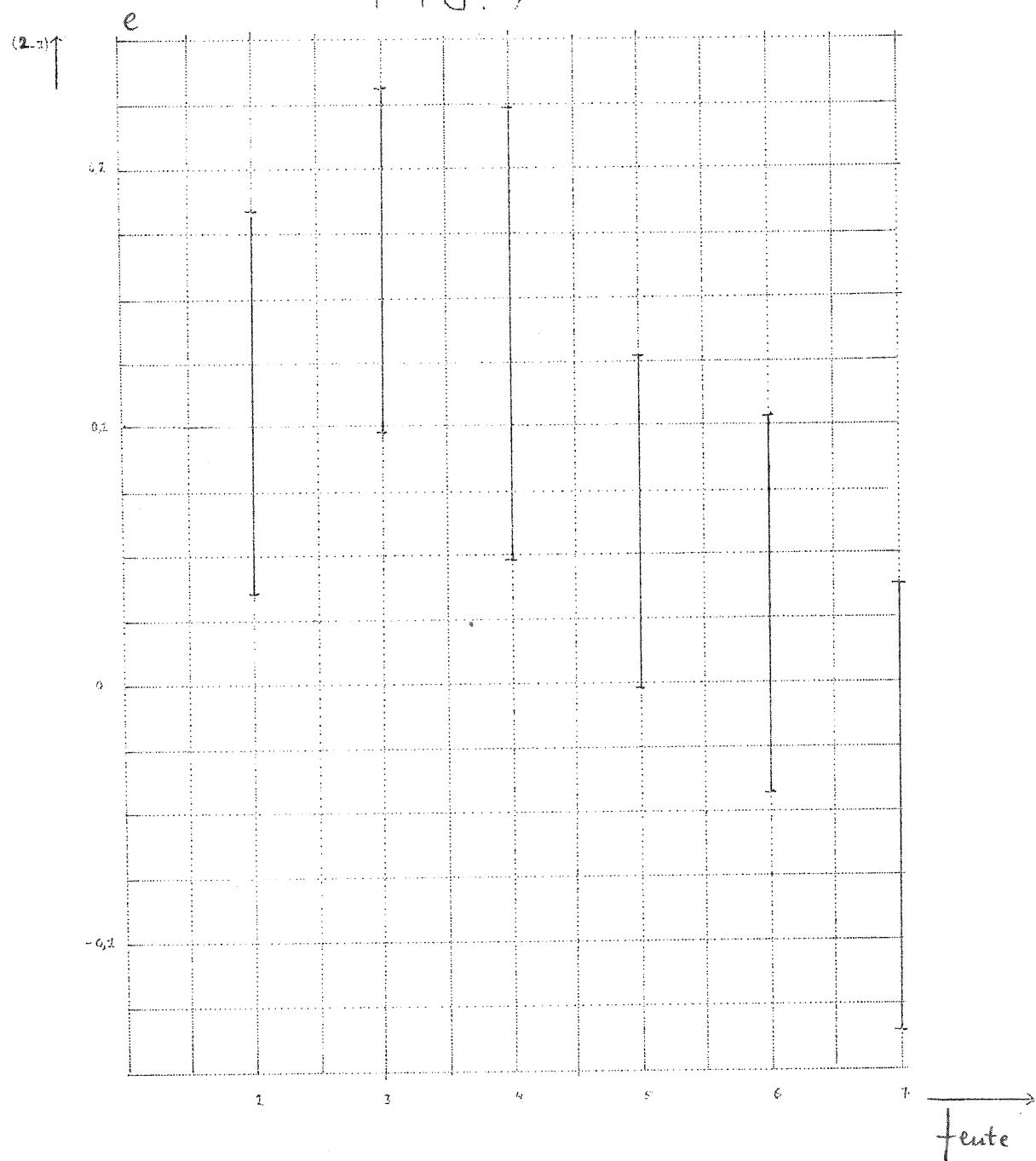


FIG. 8

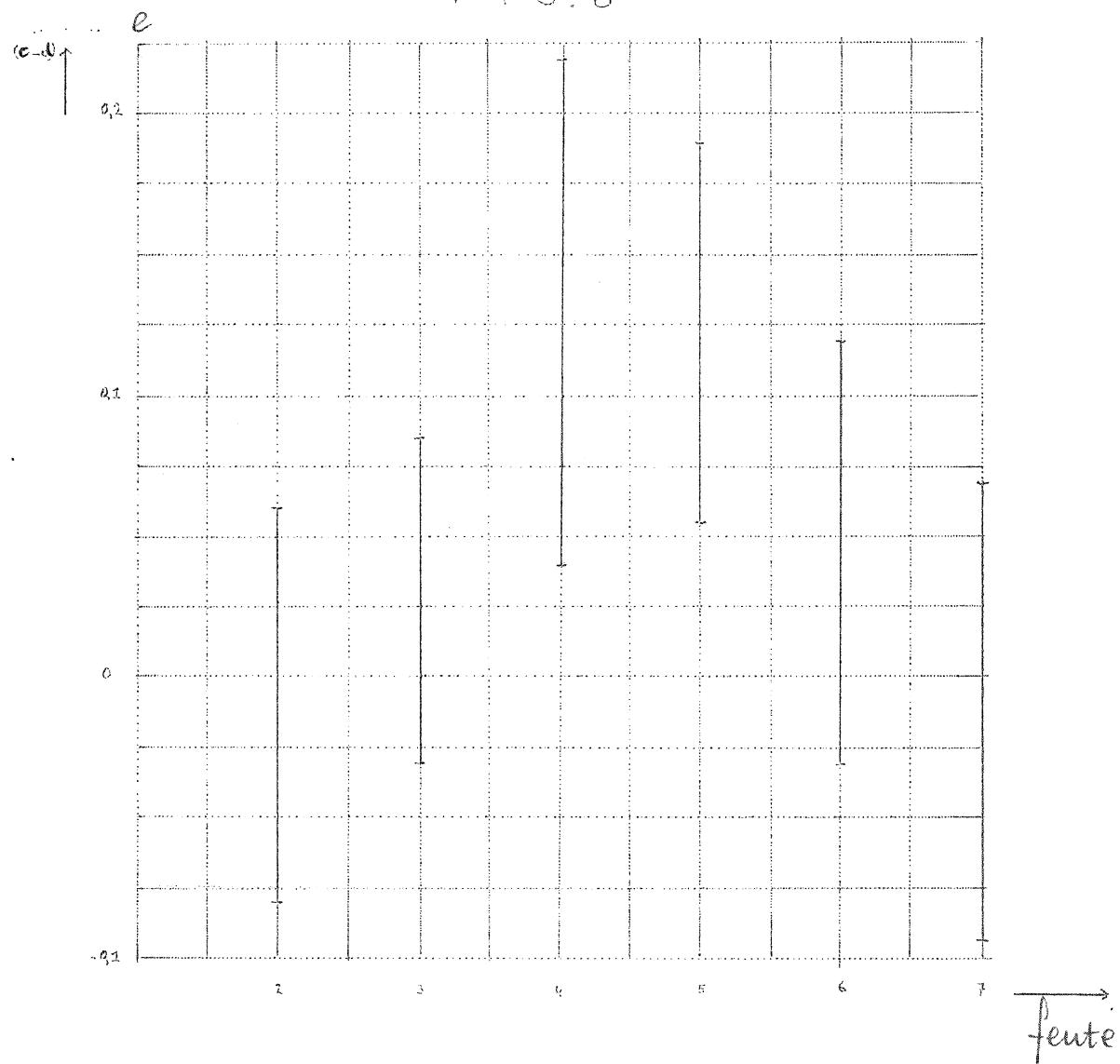


FIG. 9

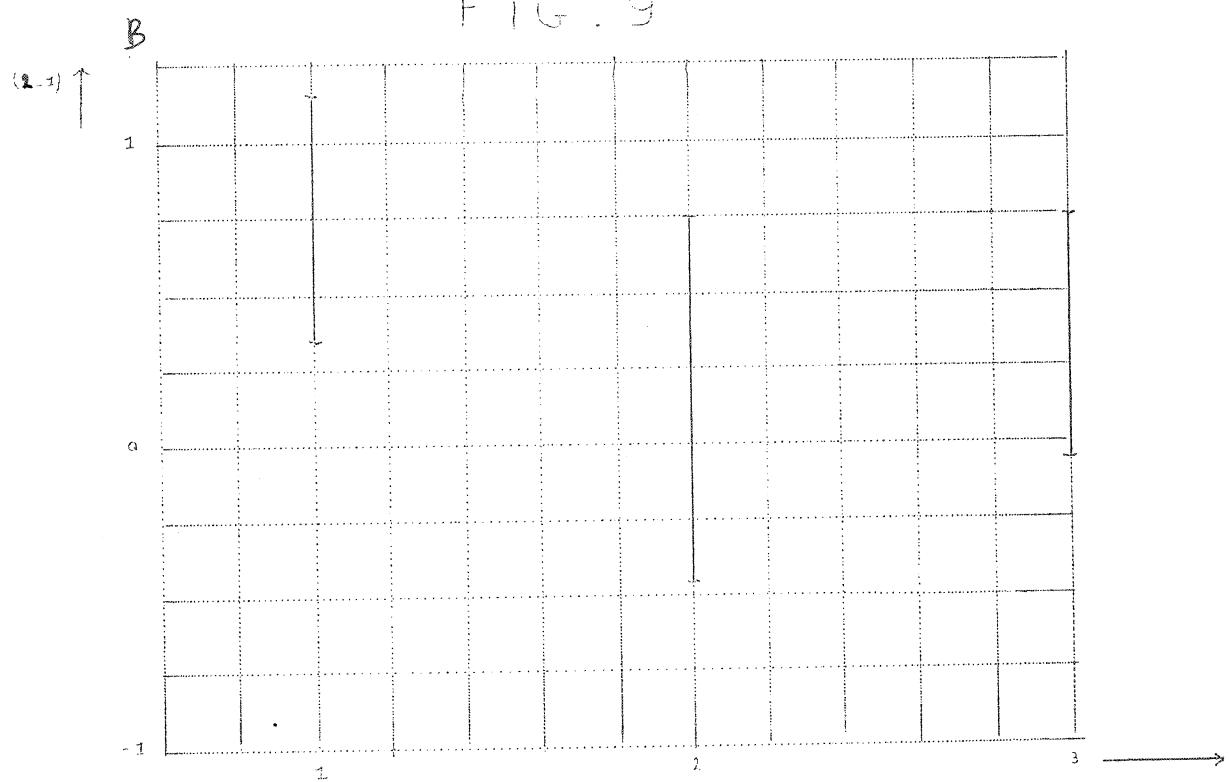


FIG. 10

